数理解析研究所講究録
41巻 1968年 39-45

Hasse factor systems の作る variety.

名大 教養　増田 勝彦

§1. 序

Galois algebra は，Kummer 拡大についての代数的理論を一般の Galois 拡大へ何とかして拡張したいというはっきりした意図をもって H. Hasse が 1949年に導入した概念である．その後，1950年代のはじめに，上にのべた Hasse の意図の方向にいくつかの論文が発表されたが，やがてこの方向の研究はとだえてしまった．

その後，最近まで，いくつかの Galois algebra の論文は，ちらほらとあらわれているが，大体，次の二つの線のものである．(イ) 一つは，与えられた Galois 群をもつ Galois 拡大体の構成問題をめぐるごく特殊な研究．(ロ) 他の一つは，Homological algebra との関連で，きわめて抽象的な Galois algebra の理論．

したがって，冒頭に述べた Hasse の本来の意図の方向に関

しては，1950年代の論文のままで放置されているといっても過言ではなさそうである．

さて，現在の立場でこれをふりかえってみると，1950年代の論文にあらわれているままでは，Formulationの点で，大分，改良の余地があると考えられる．そのことを，以下で述べたい．したがって，この論文の内容は，必ずしも独創的研究といえる程のものでもなく，さりとて，既知の理論とも言いがたいようで，本来，発表の場所に苦しむ性格のものと思うが，この紙面のような良い発表機会を与えて頂いたことを，深く感謝する．

（読者の御便宜を考えて，ごく基本的なもののみには，証明をつけておく．しかし，本来すべて，きわめて容易な性格のものである）

§2. 基本定理．

Gを与えられた有限群，その位数をn，標数がnをわらない universal domain を一つ固定してΩと表わす．Ω内の素体をP．Ω上のGの既約表現を各指標（既約）ごとにとって定めておき，D_χで表わす．χは指標を表わし，GのΩ上の既約指標の集合をΛと表わしておく．表現D_χによって$g \in G$に対応させられる行列を$D_\chi(g)$と表わ

し，その行列の次数を d_λ とする．$\mathfrak{D}_\lambda \otimes \mathfrak{D}_\mu$ ($\lambda, \mu \in \Lambda$) はまた $\mathfrak{D}_\nu$ ($\nu \in \Lambda$) のいくつかの直和と同値だが，$d_\lambda d_\mu$ 次の正則行列 $M_{\lambda,\mu}$ を定めて，$M_{\lambda,\mu}^{-1} \cdot \mathfrak{D}_\lambda \otimes \mathfrak{D}_\mu \cdot M_{\lambda,\mu} = M_{\nu_1(\lambda,\mu)} \oplus \cdots \oplus M_{\nu_r(\lambda,\mu)}$ となるようにしておく．$\mathfrak{D}_\lambda(g)$ ($\lambda \in \Lambda$, $g \in G$) の成分全体，および $M_{\lambda,\mu}$ ($\lambda, \mu \in \Lambda$) の成分の全体を P に添加した体を k_0 と表わす．

$k = k_0(x_i \mid i=1,\cdots,n)$ を k_0 上の n 次元純粋超越拡大体（もちろん $\subset \Omega$）とし，Gの元に順番をつけて，g_i ($i=1,\cdots,n$) で表わして，Gの x_i に対する作用を $x_i^{g_j} = x_l$ ($g_i g_j = g_l$) とさだめる．Gは k_0 の元にはtrivialに作用するものと定めれば，Gは k の自己同型群の一つである．各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，k 上の d_λ 次の正方行列 Y_λ を

$$Y_\lambda = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{D}(g_i^{-1})\, x_i$$

で定める．Y_λ がいわゆる factor base を与える．

Lemma 1. Y_λ は正則行列である．

証明はいく通りも考えられようが，他のGalois algebraの理論との関連から考えると，次のようなものが便利である．k_0 上抽象拡大体（Ω にふくまれない拡大）k' を $k'/k_0 \simeq k/k_0$

となるように作り、 $A = K \otimes_{K_0} K'$ を作れば、A は定域が G で値域が K 内にある一変数函数全体が普通の函数としてなす環と同型になる。（すなわち、K と同型な体の n 個の直和）
$\det |Y_\lambda|$ はこの環のなかで考えると、丁度、各 $g \in G$ において値が $\det |\mathcal{D}(g^{-1})|$ になる函数と一致する。したがって Y_λ はもちろん regular である。q. e. d.

明らかに

Lemma 2. $Y_\lambda^g = \mathcal{D}_\lambda(g)\, Y_\lambda$.

次の定理が基本的である

定理 1. 各 $\lambda, \mu \in \Lambda$ について $d_\lambda d_\mu$ 次の正方行列 $C_{\lambda,\mu}$ を

$$C_{\lambda,\mu} = (Y_\lambda \otimes Y_\mu) \cdot M_{\lambda,\mu} \left(Y^{-1}_{\nu_1(\lambda,\mu)} \oplus \cdots \oplus Y^{-1}_{\nu_r(\lambda,\mu)} \right) M_{\lambda,\mu}$$

として作るものとする。しからば $C_{\lambda,\mu}$ $(\lambda, \mu \in \Lambda)$ のすべての成分を K_0 に添加した体を $\bar{K}$ とすれば、$\bar{K}$ は K 内の G について不変にたもたれる元全体のなす体 L と一致する。

証明. $\bar{K} \subseteq L$ となることは Lemma 2 から容易に従う。$\bar{K} = L$ となることの証明は、次のように行うと容易である。$C_{\lambda,\mu}$ がいわゆる Hasse の定めた Galois algebra の因子団なので、このことから $\bar{K}[y_\lambda^{(i,j)} \mid \lambda \in \Lambda,\ i, j = 1, \cdots, d_\lambda]$ なる環が K 全体と一致することがわかる。したがって

$[K : \bar{K}] \leq n$ がえられ，一方 $[K : k] = n$，かつ $k \supseteq \bar{K}$ であるから $\bar{K} = k$ が従う。

注意，λ，$\mu \in \Lambda$ について，$\nu_1(\lambda, \mu)$，$\nu_2(\lambda, \mu) \cdots \in \Lambda$ はすべて表現 $\mathfrak{D}_\lambda$ と $\mathfrak{D}_\mu$ の直積を $M_{\lambda,\mu}$ で分解するときにきまってくる Λ の元である．したがってその個数である r も λ，μ できまるから $\nu_1(\lambda, \mu), \cdots, \nu_{r(\lambda,\mu)}(\lambda, \mu) \in \Lambda$ とかくべきだが，簡単のため $\nu_r(\lambda, \mu)$ で最後の項を表わした。

§3．一般な Galois 拡大における Kummer 体のアナロジー

一般に考えて，n 次巡回拡大について $\Omega^n \cap K$ にあたるものが，行列集合として表われてくることを示す．たゞし，ここで，$\Omega^n = \{\alpha^n \mid \alpha \in \Omega\}$ を表わす。

各 $\lambda \in \Lambda$ に対応して d_λ 次の Ω 係数の正方行列の全体を，$\mathfrak{M}_\lambda$ で表わす．正則行列全体のときは，$\mathfrak{M}_\lambda^*$ と表わすことにする．集合としての $\mathfrak{M}^*_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ の直積を $\mathfrak{M}^*$ と表わし $\mathfrak{M}^*$ の元を点とよんで $p, p', \cdots$ で表わそう．各 (λ, μ) $(\lambda, \mu \in \Lambda)$ 全体に $d_\lambda d_\mu$ 次の正方行列（Ω 上）の全体を対応させて $\mathfrak{N}_{\lambda,\mu}$ と表わし，$\mathfrak{N}_{\lambda,\mu}$ $(\lambda, \mu \in \Lambda)$ の集合としての直積を $\mathfrak{N}$ と表わす．$\mathfrak{M}$ から $\mathfrak{N}$ 内への有理写像 ρ を $\rho(p) = g \in \mathfrak{N}$ とは g の (λ, μ)-成分 $C_{\lambda,\mu}$ が p の λ 成分，μ 成分 M_λ，M_μ および他の p の成分に

よって

$$C_{\lambda,\mu} = (M_\lambda \otimes M_\mu)\, M_{\lambda,\mu} \left(M^{-1}_{\nu_1(\lambda,\mu)} \oplus \cdots \oplus M^{-1}_{\nu_r(\lambda,\mu)}\right) M^{-1}_{\lambda\mu}$$

となっていることとして，ρ を定義する．しからば

定理２．　$P, P' \in \mathfrak{M}$ についてもし $\rho(P) = \rho(P')$ ならば，P, P' は G の部分群と同型なあるGalois群について共軛である．（Galois群とは Ω 内のある $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}'$ という風なGalois拡大でのGalois群をいう）

証明は，有限群についての淡中の双対定理を用いればよい．$M_\lambda M_\lambda^{-1} = \mathfrak{D}_\lambda(g)$　$(\lambda \in \Lambda)$ となる $g \in G$ が存在することが，淡中の双対定理から従う，q.e.d.

定理３．　$P \in \mathfrak{M}$ について　$\rho(P) = g$ の成分行列の全成分（行列の成分）を k_0 に添加した体を $k_0(g) = k_0(\rho(P))$ と表わす．しからば

$k_0(P) / k_0(\rho(P))$ はGalois拡大で，その

Galois群は G の部分群と同型である．$P \in \mathfrak{M}$ を動かせば Ω 内におけるGalois拡大で $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{F}' \supset k_0$ の形の $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}'$ のGalois群が G と同型になる如き場合は，すべて $k_0(P)/k_0(\rho(P))$ の形でつくされてしまう．（Galois群が G の真部分群となるような $P \in \mathfrak{M}^*$ は $\mathfrak{M}^*$ のかなり小さな部分集合となる）

注．定理２の末尾にカッコ書きした $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$ は $\mathfrak{F} = k_0(P)$，$\mathfrak{F}' = k_0(\rho(P))$ にとればよいのである．

ρ による $\mathfrak{M}^*$ の像として定まる $\mathfrak{N}$ の部分集合, $\rho(\mathfrak{M}^*)$ が, Galois algebra の Hasse の意味の因子団（G についての）全体と一致する.

（Hasse の後, 中山さんに従って, Galois algebra の定義に commutative, や semisimple や その他 Hasse がつけておいたいくつかの条件をとりのぞいておくようになった.（実際, その方が便利なことが多い）. そこで, 本来 Hasse の定義の意味の Galois algebra に附着する因子団を, Hasse の因子団とよぶことがある. この論文の標題も, その意味であって, 正確を期せば Galois algebra を Hasse の本来の意味にとったときの, その Galois algebra に附着する因子団のこと というべきであろう. Hasse の因子団というと, 誤解をまねくこともありそうだが, 便宜上, やむおえなかった)

以上